Katedra Informatyki Stosowanej - Studium Podstaw Informatyki

PAKIET MathCad - Część II

Obliczenia wektorowe i macierzowe

Uwagi:

1. Mathcad traktuje wektory jak ***macierze jednokolumnowe.***
   Większość symboli operatorów jest identyczna zarówno dla wektorów, jak i dla macierzy, jednak interpretacja uzyskiwanych wyników może być odmienna!
2. Indeksowanie składowych macierzy rozpoczyna się domyślnie od **0,** a nie **-** jak w tradycyjnej notacji algebraicznej od **1**. Decyduje o tym warość zmiennej wbudowanej ORIGIN.
   Mathcad ustawia domyślnie wartość zmiennej równą zero: **ORIGIN=0**

Jeżeli zaistnieje potrzeba, aby indeksy kolumn i wierszy zaczynały się od 1, to należy zmienić wartość zmiennej wykonując

$$\text{ORIGIN} \equiv 1$$

Należy pamiętać, że **zmienna tak wpisana odnosi się do całego arkusza roboczego**!.

1. DEFINIOWANIE MACIERZY

1 sposób - definicja bezpośrednia

a). należy w miejscu kursora roboczego wpisać:

***nazwa_zmiennej_tablicowej* :**

b). wybrać polecenie: **INSERT | MATRIX**

lub **<Ctrl>+<m>**

lub wybrać ikonę tworzenia macierzy z palety wektorowej i macierzowej **Vector and Matrix**

c). w wyświetlonym oknie Insert Matrix podać:
liczbę wierszy - pole **Rows**
liczbę kolumn - pole **Columns**

d). w obszarze roboczym pojawi się szablon macierzy z odpowiednią liczbą znaków braku i kursorem w pozycji pierwszej składowej, którą należy wypełnić wartościami elementów przemieszczając się po szablonie przy pomocy klawisza **<Tab>** (wypełnianie wierszami).

UWAGI:

Macierze duże można tworzyć:
- wykorzystując polecenia dołączania **Augment** lub **Stack**
- stosując formuły definiujące elementy macierzy (o ile jest to możliwe)
- wczytując elementy macierzy z pliku tekstowego.

Przykład 1.

Utwórz macierz o wymiarach 2*3 i wektor 4-elementowy:

$$\mathbf{M} := \begin{pmatrix} 2 & 5 & 17 \\ 3.5 & 3.9 & -12.5 \end{pmatrix}$$

<-- Należy wprowadzić: **M:**
wcisnąć **<Ctrl>+m**
i podać: liczbę wierszy (Rows) = **2**
liczbę kolumn (Columns) = **3**

$$v := \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

<-- Należy wprowadzić: **v:**
wcisnąć **<Ctrl>+m**
i podać: liczbę wierszy (Rows) = **4**
liczbę kolumn (Columns) = **1**

2 sposób - definicja pośrednia

a). należy zdefiniować dla macierzy dwie zmienne zakresowe o kroku 1,
zaś dla wektora jedną zmienną zakresową
np. dla macierzy

indeks1:wartość_początkowa;wartość_końcowa

indeks2:wartość_początkowa;wartość_końcowa

Jeśli zmienna ORIGIN=0, to wartość_początkowa=0,
jeśli zaś ORIGIN=1, to wartość_początkowa=1

b). wprowadzić formułę do automatycznego wypełnienia macierzy

nazwa_macierzy[indeks1,indeks2:wyrażenie

Uwaga: Pośrednie definiowanie macierzy jest możliwe tylko wtedy, gdy możemy podać jeden wzór opisujący elementy macierzy.

Przykład 2.

Ustal indeksy kolumn i wierszy macierzy od **1.**
Utwórz macierz o wymiarach 3*4 o elementach zdefiniowanych podaną formułą: $A_{i,j}$**=i+2j**

ORIGIN ≡ 1

Uwaga:
W całym dokumencie indeksy kolumn i wierszy macierzy zaczynają się od 1!

$i := 1 .. 3 \qquad j := 1 .. 4 \qquad A_{i,j} := i + 2 \cdot j$

<-- Należy wpisać: **i:1;3** **j:1;4** **A[i,j:i+2*j**

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 & 9 \\ 4 & 6 & 8 & 10 \\ 5 & 7 & 9 & 11 \end{pmatrix}$$

3 sposób - definicja przez wprowadzanie elementów bezpośrednio z klawiatury

a). należy zdefiniować dla macierzy dwie zmienne zakresowe o kroku 1,
zaś dla wektora jedną zmienną zakresową

b). wprowadzać elementy kolejnych wierszy oddzielone przecinkami

nazwa_macierzy[ind1,ind2:element_11,element_12,element_13,...,element_ind1ind2

Przykład 3.
Utwórz macierz o wymiarach 3*3 o elementach równych od 1 do 9 zapisanych wierszami

$i := 1..3$ $j := 1..3$ $F_{i,j} :=$ <-- Należy wpisać: **F[i,j:1,2,3,4,5,6,7,8,9**

1
2
3
4
5
6
7
8
9

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

2. OPERACJE MACIERZOWE

Podstawowe obliczenia na wektorach:

(wektory u,w,v - tego samego rozmiaru, c-liczba rzeczywista, x,d - zmienne rzeczywiste)

v:=u+w *dodawanie wektorów*

v:=u-w *odejmowanie wektorów*

v:=c*w *mnożenie wektora przez skalar*

x:=u*w *iloczyn skalarny wektorów* *<-- należy wpisać operator mnożenia < * >*
lub wstawić symbol $\blacksquare \cdot \blacksquare$ z palety macierzowej

v:=uxw *iloczyn wektorowy wektorów* *<-- należy wstawić symbol* $\blacksquare \times \blacksquare$ *z palety macierzowej*
(u, w, v - wektory trójelementowe)

d:=|u| *długość wektora* *<-- należy wpisać znak < | > (<Shift>+<\>)*

Uwaga: Nie wstawiać symbolu $|\blacksquare|$ *z palety macierzowej oznaczającego wyznacznik macierzy*

u[i *element wektora (element z indeksem i)*

Podstawowe obliczenia na macierzach:

(macierze A,B,M - tego samego rozmiaru, k-liczba rzeczywista, x,d - zmienne rzeczywiste)

M:=A+B *dodawanie macierzy*

M:=A-B *odejmowanie macierzy*

M:=k*A *mnożenie przez skalar*

M:=A*C *iloczyn macierzy (liczba kolumn macierzy A=liczbie wierszy macierzy C)*

det:=|A| *wyznacznik macierzy* *<-- należy wstawić symbol* $|\blacksquare|$ *z palety macierzowej*
lub wpisać znak < | > (<Shift>+<\>)

M:=A^{-1} *macierz odwrotna* *<-- należy wpisać:* ***A^-1***

D:=A^{T} *macierz transponowana* *<-- należy wstawić symbol* $\blacksquare^{T}$ *z palety macierzowej*
lub wcisnąć kombinację klawiszy: ***<Ctrl>+<1>***

v:=A$^{\langle j\rangle}$ *j-ta kolumna macierzy* *<-- należy wstawić symbol* $\blacksquare^{\langle\blacksquare\rangle}$ *z palety macierzowej*
lub wcisnąć: ***<Ctrl>+<6>***

Wykaz podstawowych funkcji:

max(A) - element maksymalny macierzy ***A***
min(A) - element minimalny macierzy ***A***
mean(A) - średnia wartość z elementów macierzy ***A***
cols(A) - liczba kolumn macierzy ***A***
rows(A - liczba wierszy macierzy ***A***
tr(A) - suma elementów na diagonali macierzy ***A*** (ślad macierzy)
last(v) - indeks ostatniego elementu wektora ***v***
sort(v) - sortuje wektor ***v*** rosnąco
csort(A,k) - sortuje ***k***-tą kolumnę rosnąco i przestawia odpowiednio wszystkie wiersze macierzy ***A***
rsort(A,k) - sortuje ***k***-ty wiersz rosnąco i przestawia odpowiednio wszystkie kolumny macierzy ***A***
reverse(v) - odwraca kolejność elementów wektora
reverse(A) - przestawia wiersze w macierzy ***A***: pierwszy z ostatnim,drugi z przedostatnim, ...
identity(n) - utworzenie macierzy jednostkowej o wymiarach ***n*n***
diag(v) - utworzenie macierzy diagonalnej z elementami wektora ***v*** na przekątnej
geninv(A) - wyznaczenie macierzy odwrotnej
submatrix(A,w1,w2,k1,k2) - wycina z macierzy ***A[n,m]*** podmacierz o wierszach od **w1** do **w2** i kolumnach od **k1** do **k2** (w1<=w2<n i k1<=k2<m)
augment(A,B) - dołączenie do macierzy ***A*** od strony prawej macierzy ***B*** (liczba wierszy musi być równa!)
stack(A,B) - dołączenie poniżej macierzy ***A*** - macierzy ***B*** (liczba kolumn musi być taka sama!)
eigenvals(A) - wartości własne macierzy ***A***
eigenvecs(A) - wektory własne macierzy ***A***
rank(A) - rząd macierzy A

3. ĆWICZENIA

Ćwiczenie 1.

Sprawdź, czy indeksacja kolumn i wierszy zaczyna się od 1.
Dla danych wektorów **u** i **w**

$$\mathbf{ORIGIN} = 1$$

$$\mathbf{u} := \begin{pmatrix} 12 \\ 0.5 \\ 0.3 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{w} := \begin{pmatrix} 0.25 \\ -0.3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

wykonaj następujące działania:
a). wyznacz wektor **v=2u+w**

$$\mathbf{v} := 2\cdot\mathbf{u} + \mathbf{w} \qquad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 24.25 \\ 0.7 \\ 2.6 \end{pmatrix}$$

b). wyznacz:
- wektor jednostkowy **p** - prostopadły do wektorów **u** i **w**
- podaj wartość trzeciej składowej wyniku

$$\mathbf{p} := \frac{\mathbf{u}\times\mathbf{w}}{|\mathbf{u}\times\mathbf{w}|} \qquad \mathbf{p} = \begin{pmatrix} 0.045 \\ -0.987 \\ -0.154 \end{pmatrix}$$

<-- Operator iloczynu wektorowego ∎×∎ wstaw z palety macierzowej
- Symbol długości wektora: | (<Shift> + <\>)

$p_3 = -0.154$ <-- *Należy wpisać:* **p[3=**

Sprawdzenie: **p** - wektor jednostkowy prostopadły do wektorów **u** i **w**

$p \cdot u = 0 \qquad p \cdot w = 0 \qquad |p| = 1$

c). posortuj współrzędne wektora **v** rosnąco oraz malejąco:

$$\mathrm{sort}(v) = \begin{pmatrix} 0.7 \\ 2.6 \\ 24.25 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{reverse}(\mathrm{sort}(v)) = \begin{pmatrix} 24.25 \\ 2.6 \\ 0.7 \end{pmatrix}$$

d). utwórz macierz diagonalną z elementami wektora **p** na głównej przekatnej

$$\mathrm{diag}(p) = \begin{pmatrix} 0.045 & 0 & 0 \\ 0 & -0.987 & 0 \\ 0 & 0 & -0.154 \end{pmatrix}$$

Ćwiczenie 2.

Zdefiniuj macierz **M** o wymiarach 2*3

$$M := \begin{pmatrix} 2 & 5 & 17 \\ 3.5 & 3.9 & -12.5 \end{pmatrix}$$

a). pobierz element z drugiego wiersza i trzeciej kolumny, sprawdź, czy istnieje element $M_{0,0}$

$M_{2,3} = -12.5$ <-- *Należy wpisać*: **M[2,3=** $\qquad M_{0,0} = ■$

b). posortuj elementy macierzy wzgledem drugiej kolumny oraz wzgledem drugiego wiersza

$$\mathrm{csort}(M,2) = \begin{pmatrix} 3.5 & 3.9 & -12.5 \\ 2 & 5 & 17 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{rsort}(M,2) = \begin{pmatrix} 17 & 2 & 5 \\ -12.5 & 3.5 & 3.9 \end{pmatrix}$$

Ćwiczenie 3.

Zdefiniuj dwie macierze **A** i **B** oraz stałą **k**

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 6 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ -7 & 2 & 2 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad k := 6$$

Wykonaj następujące działania:

a). wyznacz elementy maksymalne, minimalne i średnie arytmetyczne w obu macierzach

$\max(A) = 6 \qquad \min(A) = -1 \qquad \mathrm{mean}(A) = 2.556$

$\max(B) = 5 \qquad \min(B) = -7 \qquad \mathrm{mean}(B) = 1.111$

b). oblicz **k*A, A*B, 2A-3B**

$$k\cdot A = \begin{pmatrix} 12 & 18 & 24 \\ 6 & 24 & 36 \\ 12 & 12 & -6 \end{pmatrix} \qquad A\cdot B = \begin{pmatrix} -19 & 26 & 20 \\ -35 & 34 & 27 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad 2\cdot A - 3\cdot B = \begin{pmatrix} -11 & 0 & 5 \\ 23 & 2 & 6 \\ 10 & -8 & -11 \end{pmatrix}$$

c). oblicz wyznaczniki macierzy **A** i **B,** ich rzędy oraz sumę elementów na głównej przekątnej macierzy

$$|A| = -17 \qquad |B| = 0 \qquad \mathrm{rank}(A) = 3 \qquad \mathrm{rank}(B) = 2 \qquad \mathrm{tr}(A) = 5$$

d). - znajdź macierz odwrotną do macierzy **A**
- sprawdź iloczyny macierzy danej **A** i odwrotnej

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0.941 & -0.647 & -0.118 \\ -0.765 & 0.588 & 0.471 \\ 0.353 & -0.118 & -0.294 \end{pmatrix}$$

<-- Należy wpisać: **A^-1=** lub **geninv(A)=**

$$\mathrm{geninv}(A) = \begin{pmatrix} 0.941 & -0.647 & -0.118 \\ -0.765 & 0.588 & 0.471 \\ 0.353 & -0.118 & -0.294 \end{pmatrix} \qquad A\cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^{-1}\cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e). - utwórz macierz blokową **D** - poprzez pionowe zestawienie macierzy **A** i **B**
- transponuj macierz **D**
- przestaw wiersze w macierzy **D:** pierwszy z ostatnim, drugi z przedostatnim, ...
- utwórz wektor kolumnowy **u,** którego współrzędne są elementami drugiej kolumny macierzy **D**
- utwórz wektory kolumnowe **w1** i **w3,** których współrzędne są elementami odpowiednio pierwszego i trzeciego wiersza macierzy **D**

$$D := \mathrm{stack}(A, B)$$

<-- Należy wybrać symbol $\blacksquare^{T}$ z palety macierzowej

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 6 \\ 2 & 2 & -1 \\ 5 & 2 & 1 \\ -7 & 2 & 2 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad D^{T} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 5 & -7 & -2 \\ 3 & 4 & 2 & 2 & 2 & 4 \\ 4 & 6 & -1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{reverse}(D) = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 3 \\ -7 & 2 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 6 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$u := D^{\langle 2\rangle} \qquad w1 := \left(D^{T}\right)^{\langle 1\rangle} \qquad w3 := \left(D^{T}\right)^{\langle 3\rangle}$$

<-- Należy wybrać symbol $\blacksquare^{\langle\blacksquare\rangle}$ z palety lub wcisnąć **<Ctrl> + <6>**

$$u = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad w1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad w3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ćwiczenie 4.

Zdefiniuj macierz **C** o wymiarze 4*3 podając formułę określającą każdy element:

$i := 1..4 \qquad j := 1..3$

$$C_{i,j} := i^2 + 2\cdot j \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 6 & 8 & 10 \\ 11 & 13 & 15 \\ 18 & 20 & 22 \end{pmatrix}$$

Wykonaj następujące działania:

a). z elementów macierzy **C** utwórz trzy podmacierze **C1, C2** i **C3** określone następująco:

- macierz **C1 -** zawierającą wiersze od 1 do 3 i kolumny od 1 do 3
- macierz **C2 -** zawierajacą wiersze od 2 do 4 i kolumny od 1 do 3
- macierz **C3 -** zawierającą wiersze od 1 do 4 i kolumny od 1 do 2

$C1 := \mathrm{submatrix}(C, 1, 3, 1, 3)$

$C2 := \mathrm{submatrix}(C, 2, 4, 1, 3)$

$C3 := \mathrm{submatrix}(C, 1, 4, 1, 2)$

$$C1 = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 6 & 8 & 10 \\ 11 & 13 & 15 \end{pmatrix} \qquad C2 = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 10 \\ 11 & 13 & 15 \\ 18 & 20 & 22 \end{pmatrix} \qquad C3 = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 8 \\ 11 & 13 \\ 18 & 20 \end{pmatrix}$$

b). Z elementów macierzy **C** utwórz macierze blokowe **D1, D2** i **D3** określone następująco:

- macierz **D1 -** poprzez poziome zestawienie macierzy **C1** i **C2**
- macierz **D2 -** poprzez poziome zestawienie macierzy **C** i **C3**
- macierz **D3 -** poprzez pionowe zestawienie macierzy **C** i **C1**
- dla każdej z macierzy wyznacz liczbę wierszy i kolumn

$D1 := \mathrm{augment}(C1, C2)$

$D2 := \mathrm{augment}(C, C3)$

$D3 := \mathrm{stack}(C, C1)$

$$D1 = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 & 6 & 8 & 10 \\ 6 & 8 & 10 & 11 & 13 & 15 \\ 11 & 13 & 15 & 18 & 20 & 22 \end{pmatrix}$$

$\text{rows}(D1) = 3$
$\text{rows}(D2) = 4$
$\text{rows}(D3) = 7$

$\text{cols}(D1) = 6$
$\text{cols}(D2) = 5$
$\text{cols}(D3) = 3$

$$D2 = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 & 3 & 5 \\ 6 & 8 & 10 & 6 & 8 \\ 11 & 13 & 15 & 11 & 13 \\ 18 & 20 & 22 & 18 & 20 \end{pmatrix} \qquad D3 = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 6 & 8 & 10 \\ 11 & 13 & 15 \\ 18 & 20 & 22 \\ 3 & 5 & 7 \\ 6 & 8 & 10 \\ 11 & 13 & 15 \end{pmatrix}$$

Ćwiczenie 5.

Zdefiniuj macierz **A** o wymiarach 5*3

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 9 & 0 & 2 \\ 6 & 8 & 4 \\ 2 & 9 & 2 \\ 8 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Wykonaj następujące działania:
a). wybierz kolumnę pierwszą i trzecią
b). trzecią kolumnę posortuj malejąco

$$A^{\langle 1 \rangle} = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 6 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} \qquad A^{\langle 3 \rangle} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \text{reverse}\left(\text{sort}\left(A^{\langle 3 \rangle}\right)\right) = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

c). oblicz sumy elementów obydwu kolumn

$$\sum A^{\langle 1 \rangle} = 27 \qquad \sum A^{\langle 3 \rangle} = 8$$

d). oblicz iloczyn wektorowego wektorów kolumnowych utworzonych z pierwszego i piątego wiersza macierzy

$$w1 := \left(A^T\right)^{\langle 1 \rangle} \qquad w5 := \left(A^T\right)^{\langle 5 \rangle}$$

$$w1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad w5 = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad w1 \times w5 = \begin{pmatrix} -6 \\ 10 \\ -38 \end{pmatrix}$$

Ćwiczenie 6.

Jeżeli jeden z wymiarów macierzy jest większy równy 10, to macierz jest wyświetlana na zasadzie przewijania np.

$$i := 1 .. 2 \qquad j := 1 .. 12 \qquad G_{i,j} := \sin(i) + \frac{\pi}{2} - j$$

G =

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1.412	0.412	-0.588	-1.588	-2.588	-3.588	-4.588	-5.588	-6.588
2	1.48	0.48	-0.52	-1.52	-2.52	-3.52	-4.52	-5.52	-6.52

<-- Kliknięcie w dowolnym miejscu macierzy spowoduje pojawienie się pasków przewijania umożliwiając przeglądanie wszystkich elementów macierzy.

Uwaga:

Jeżeli chcemy wyświetlić wszystkie elementy macierzy należy:

- kliknąć w dowolnym miejscu na macierzy
- wybrać opcje **Format | Results... | Display Option | Matrix display style** i zaznaczyć opcję **Matrix**

Przetestuj opcje: **Automatic** i **Table**

Ćwiczenie 7.

Rozwiąż metodą macierzową układ równań liniowych (liczba równań jest równa liczbie niewiadomych)

```
        y + 2z = 13
        3x +2z = -3
5x + 3y + z = 50
```

Należy kolejno wykonać:

1. zdefiniuj macierz współczynników i kolumnę wyrazów wolnych

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 13 \\ -3 \\ 50 \end{pmatrix}$$

2. oblicz wartość wyznacznika macierzy współczynników i w zależności od jego wartości wyznacz rozwiązanie

$$det := |A| \qquad det = 25$$

Ponieważ wyznacznik macierzy jest różny od zera, więc można rozwiązać układ metodą macierzową:

$$X := A^{-1} \cdot B \qquad X = \begin{pmatrix} 0.28 \\ 16.84 \\ -1.92 \end{pmatrix}$$

Sprawdzenie: $A \cdot X = \begin{pmatrix} 13 \\ -3 \\ 50 \end{pmatrix}$

lub zdefiniować rozwiązanie wykorzystując funkcję warunkową **if**

$$X := \mathrm{if}\left[|A| \neq 0, A^{-1} \cdot B, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right] \qquad X = \begin{pmatrix} 0.28 \\ 16.84 \\ -1.92 \end{pmatrix}$$

Definiowanie tablic z wykorzystaniem palety programowej *Programming*

Ćwiczenie 8.

Zdefiniuj dwa n-elementowe wektory **u** i **v** dane poniższymi formułami:

$$n := 8 \qquad k := 1 .. n$$

$$u_k := \sin\left(\frac{k^2}{\pi}\right)$$

$$v_k := \begin{cases} (u_k)^2 & \text{if } u_k < 0 \\ 1 & \text{if } u_k = 0 \\ u_k + 1 & \text{if } u_k > 0 \end{cases}$$

<-- Wykonanie:
Wyswietl palety: **Programming** i **Boolean**
- wpisz **v[k:**
- kliknij dwukrotnie **Add Line**
- w miejsce każdego znak braku wprowadź **if**
- uzupełnij odpowiednie formuły i warunki

Znak "**twardej równości**" wprowadź z palety **Boolean** lub wcisnij **<Ctrl>** + **<=>**

$$u = \begin{pmatrix} 0.313 \\ 0.956 \\ 0.273 \\ -0.928 \\ 0.995 \\ -0.894 \\ 0.111 \\ 0.999 \end{pmatrix} \qquad v = \begin{pmatrix} 1.313 \\ 1.956 \\ 1.273 \\ 0.862 \\ 1.995 \\ 0.8 \\ 1.111 \\ 1.999 \end{pmatrix}$$

4. OPRACOWYWANIE WYNIKÓW POMIARÓW - REGRESJA LINIOWA

1. Współczynniki prostej regresji

Dany jest zbiór pomiarów doświadczalnych **{x_i, y_i}**. Poszukiwana jest prosta regresji postaci

y(x) = a*x + b

taka, która będzie najlepiej dopasowana do danych punktów.

W programie MathCad współczynniki modelu regresji liniowej możemy wyznaczyć za pomocą procedur wbudowanych bazując na danych wektorach **x** i **y** - uzyskane metodą najmniejszych kwadratów.

Są to:

funkcja ***slope(x,y)*** - zwraca wartość **współczynnika kierunkowego** prostej regresji (**współczynnik a**)

funkcja ***intercept(x,y)*** - zwraca wartość będącą przecięciem prostej regresji z osią OY (**współczynnik b**)

oraz funkcja ***line(x,y)*** - zwracająca wektor współczynników a i b prostej regresji w postaci

$$\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$$

Ćwiczenie 9.

W wyniku pomiarów uzyskano dane zapisane w dwóch dziesięcio-elementowych wektorach x_i oraz y_i .

$$x := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix} \qquad y := \begin{pmatrix} 8 \\ 14 \\ 10 \\ 15 \\ 22 \\ 14 \\ 17 \\ 20 \\ 22 \\ 26 \end{pmatrix}$$

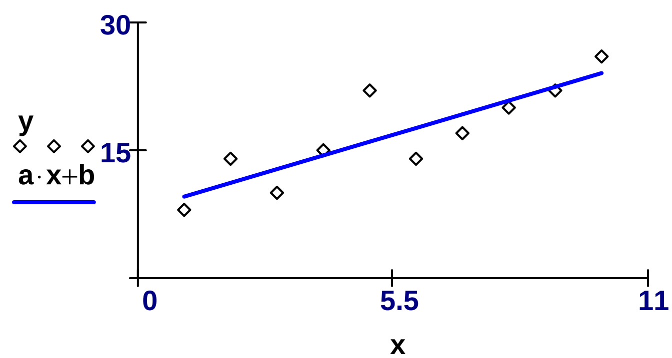
Wyznaczenie współczynników regresji liniowej y(x)=a*x+b :

$a := \mathrm{slope}(x, y)$ $\quad a = 1.612$

$b := \mathrm{intercept}(x, y)$ $\quad b = 7.933$

$$\mathrm{line}(x, y) = \begin{pmatrix} 7.933 \\ 1.612 \end{pmatrix}$$

Wykres otrzymanej prostej regresji y(x)=a*x+b na tle punktów empirycznych:



2. Zasady wczytywania danych z plików dyskowych

Program umożliwia wczytywanie danych z plików, które zostały wcześniej przygotowane w innych aplikacjach, np.

- w plikach tekstowych z rozszerzeniem ***.prn** lub ***.txt**
- danych arkusza Excel

Jeśli plik znajduje się w bieżącym do dokumentu katalogu, to wczytywanie danych można przeprowadzić za pomocą polecenia:

READPRN("nazwa_pliku.prn") lub **READPRN("nazwa_pliku.txt")**

Ćwiczenie 10.

Wykorzystując edytor tekstowy przygotuj plik z danymi o pomiarach i zapisz go pod nazwą: **pomiary.prn** .
Wykonaj kolejno:

1. Wczytaj dane z pliku do macierzy **A**
2. Przepisz **pierwszą kolumnę** macierzy **A** do **wektora x**, zaś **drugą kolumnę** do **wektora y**
3. Wyznacz współczynniki regresji liniowej
4. Oblicz współczynnik korelacji między prostą regresji i pomiarami.
5. Przedstaw wyniki na wykresie

$A := \mathrm{READPRN}(\text{"pomiary.prn"})$

$n := \mathrm{rows}(A) \qquad n = \blacksquare$

$i := 1 .. n \qquad x_i := A_{i,1} \qquad y_i := A_{i,2}$

$A = \blacksquare$

$a := \mathrm{slope}(x, y) \qquad a = \blacksquare$

$b := \mathrm{intercept}(x, y) \qquad b = \blacksquare$

$z_i := a \cdot x_i - b$

$x = \blacksquare \qquad y = \blacksquare \qquad r := \mathrm{corr}(y, z) \qquad r = \blacksquare$