Katedra Informatyki Stosowanej - Studium Podstaw Informatyki

PAKIET MathCad - Część III

RÓWNANIA I UKŁADY RÓWNAŃ

1. Równania z jedną niewiadomą

MathCad posiada trzy funkcje służące do rozwiązywania równań z jedną niewiadomą.
Dwie z nich są ogólnego przeznaczenia, trzecia z nich jest wyspecjalizowana do wyznaczania pierwiastków równań wielomianowych:

root(f(x),x) - poszukiwanie pierwiastka równania **f(x)=0** **z zadaną wartością początkową**

root(f(x),x,a,b) - poszukiwanie pierwiastka równania **f(x)=0** **w zadanym przedziale (a,b)**
Uwaga: Wartości funkcji f(x) w punktach a i b muszą mieć różne znaki, tzn. f(a)*f(b)<0

polyroots(v) - poszukiwanie wszystkich pierwiastków **wielomianu** o współczynnikach zapisanych w wektorze **v** (od wyrazu wolnego zaczynając)

1.1. Zastosowanie funkcji root(f(x),x) do wyznaczania pierwiastka równania f(x)=0

Aby wyznaczyć miejsce zerowe funkcji należy wykonać kolejno:

1). zdefiniować funkcję (występującą po lewej stronie równania)

f(x):

2). przypisać zmiennej x - wartość początkowa pierwiastka

x:

3). wywołać funkcję root

root(f(x),x)=

Uwaga: Aby zrealizować punkt 2) należy wcześniej wykonać **wykres funkcji y = f(x)**, z którego można odczytać wartości przybliżone pierwiastków.

Ćwiczenie 1.

Rozwiąż równanie: $e^x=x^3$ w przedziale (-5, 5)

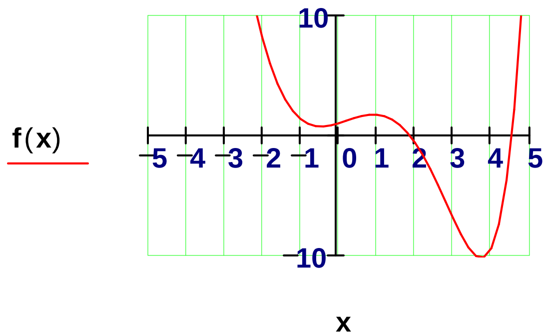
I sposób:

1). definicja funkcji:

$$f(x) := e^x - x^3$$

2). definicja zmiennej zakresowe potrzebna do wykonania wykresu funkcji w przedziale <-5,5> z krokiem 0.2

$$x := -5, -4.8 .. 5$$



Z wykresu wynika, że pierwiastek równania znajduje się w pobliżu x=**2.** Należy więc przyjąć **2** za początkowe przybliżenie pierwiastka:

$x := 2$

3). Wyznaczenie pierwiastka - wywołanie funkcji **root** z dokładnością 0.001 (domyślna wartość dokładności). Ustal lokalnie wyświetlanie wyników w notacji dziesiętnej z 6-cioma cyframi dziesiętnymi:

$TOL = 0.001$

$x_1 := \mathrm{root}(f(x), x)$ $\quad x_1 = 1.857184$ $\quad f(x_1) = -2.930989 \times 10^{-14}$

Wyznaczenie drugiego pierwiastka:

$x := 4$ $\quad x_2 := \mathrm{root}(f(x), x)$ $\quad x_2 = 4.536404$ $\quad f(x_2) = 0 \times 10^{0}$

Wyznacz ponownie pierwiastki funkcji f(x) przyjmując **lokalnie dokładność obliczeń TOL=10^{-15}**
Ustal lokalnie wyświetlanie wyników w notacji dziesiętnej z 15-toma cyframi dziesiętnymi:

$TOL := 10^{-15}$

$x := 2$ $\quad x_{11} := \mathrm{root}(f(x), x)$ $\quad x_{11} = 1.857183860207835$ $\quad f(x_{11}) = 0E+000$

$x := 4$ $\quad x_{21} := \mathrm{root}(f(x), x)$ $\quad x_{21} = 4.536403654973528$ $\quad f(x_{21}) = 0$

1.2. Zastosowanie funkcji root(f(x),x,a,b) do wyznaczania pierwiastka równania f(x)=0 w danym przedziale (a,b)

Jeżeli znamy przedział (a,b) - "przedział izolacji pierwiastka" , to możemy zastosować funkcję root w drugiej postaci i wykonać kolejno:

1). zdefiniować funkcję (występującą po lewej stronie równania)

f(x):

2). wywołać funkcję root

root(f(x),x,a,b)=

Uwaga: - Aby określić przedział izolacji pierwiastka (a,b), to należy wcześniej wykonać **wykres funkcji y = f(x)**, z którego można odczytać wartości graniczne przedziału izolacji.

II sposób wyznaczenia pierwiastka równania z Ćwiczenia 1:

Z wykresu funkcji możemy odczytać przedział izolacji pierwszego pierwiastka (**1.5, 2.5**) , zaś drugiego (**4.4,4.6**) i wywołać dla funkcji f(x) polecenie root w drugiej postaci:

$$x_{01} := \mathrm{root}(f(x), x, 1.6, 2) \qquad x_{01} = 1.857183860207835 \qquad f(x_{01}) = 0 \times 10^{0}$$

$$x_{11} := \mathrm{root}(f(x), x, 4.4, 4.6) \qquad x_{11} = 4.536403654973528 \qquad f(x_{11}) = 0 \times 10^{0}$$

Dokładniejsze odczytywanie z wykresu funkcji - początkowej wartości pierwiastka i przedziału jego izolacji

Z wykresu funkcji można odczytać dokładniejsze wartości wykorzystując opcję Trace z menu podręcznego. Należy wykonać:

- kliknąć w obszarze wykresu i wybrać z menu podręcznego opcję **Trace...** - co spowoduje pojawienie się okna **X-Y Trace**
- kliknąć na krzywej będącej wykresem funkcji blisko punktu przecięcia z osią OX z lewej strony i w oknie X-Y Trace odczytać współrzędne wskazanego punktu;
- ponownie kliknąć z prawej strony i odczytać współrzędne

W oknie X-Y Trace mamy możliwość dokładniejszego ustalenia zarówno przybliżenia początkowego, jak i dokładniejszego określenia przedziału izolacji pierwiastka.

Uwagi: - Wyświetlone współrzędne punktów można skopiować w dowolne miejsce w dokumencie;
- Odczytywanie współrzędnych kolejnych punktów na wykresie (ich gęstość) zależy od kroku zmienności zmiennej zakresowej potrzebnej do sporządzenia wykresu funkcji.

Ćwiczenie 2.

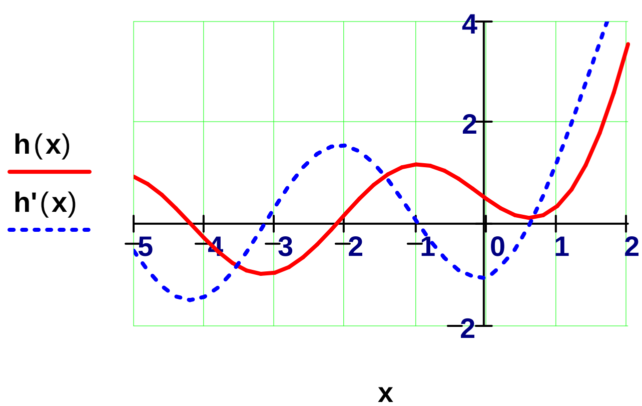
a). Wyznacz pierwiastki równania w przedziale <-5, 2>:

$$\frac{e^{x}}{2} = \sin\left(\frac{3}{2}x\right)$$

Uwaga: Przybliżenie zerowe pierwiastków lub przedziały odczytaj z wykresu wykorzystując opcję **Trace...** z menu podręcznego.

b). Wyznacz także miejsca zerowe pochodnej funkcji definiującej lewą stronę równania, aby wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji.

$$h(x) := \frac{e^{x}}{2} - \sin\left(\frac{3}{2}\cdot x\right) \qquad h'(x) := \frac{d}{dx}h(x) \qquad x := -5, -4.8 .. 2$$



<-- Aby wstawić dopisek górny (znak < **'** >) należy po nazwie funkcji lub zmiennej wcisnąć: **<Ctrl>+<F7>**

- Operator $\frac{d}{d\blacksquare}\blacksquare$ należy wstawić z palety ***Calculus***

a). Wyznaczanie miejsc zerowych funkcji h(x) :

$x := -4$ $\quad x_1 := \mathrm{root}(h(x), x)$ $\quad x_1 = -4.184$ $\quad h(x_1) = 0 \times 10^0$

lub $\quad x_{10} := \mathrm{root}(h(x), x, -4.5, -3.5)$ $\quad x_{10} = -4.184$

$x := -2$ $\quad x_2 := \mathrm{root}(h(x), x)$ $\quad x_2 = -2.134$ $\quad h(x_2) = 0$

lub $\quad x_{20} := \mathrm{root}(h(x), x, -2.2, -2)$ $\quad x_{20} = -2.134$

b). Wyznaczanie miejsc zerowych pochodnej funkcji:

$x := -3$ $\quad x_{p1} := \mathrm{root}(h'(x), x)$ $\quad x_{p1} = -3.151$ $\quad h'(x_{p1}) = -0$

$x := -1$ $\quad x_{p2} := \mathrm{root}(h'(x), x)$ $\quad x_{p2} = -0.962$ $\quad h'(x_{p2}) = 2.393 \times 10^{-15}$

$x := 0.5$ $\quad x_{p3} := \mathrm{root}(h'(x), x)$ $\quad x_{p3} = 0.608$ $\quad h'(x_{p3}) = 6.791 \times 10^{-15}$

Wnioski:

Ponieważ $h'(x_{p1}) = 0$ wraz ze zmianą znaku z "minusa" na "plus", więc funkcja osiąga minimum lokalne:

$h_{min} := h(x_{p1})$ $\quad h_{min} = -0.978$

analogicznie: $\quad h_{max} := h(x_{p2})$ $\quad h_{max} = 1.183$

$h_{min} := h(x_{p3})$ $\quad h_{min} = 0.128$

1.3. Wyznaczanie pierwiastków wielomianów

Do wyznaczania wszystkich pierwiastków równań wielomianowych stosuje się funkcję rozwiązującą **polyroots.**

Przykładowy algorytm wyznaczania pierwiastków wielomianu trzeciego stopnia:

$$w(x) := a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$$

1). zdefiniuj wektor 4-elementowy **a**, zawierający współczynniki wielomianu poczynając od wyrazu wolnego

$$a := \begin{pmatrix} a_o \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

2). wywołaj funkcję

polyroots(a)=

W wyniku otrzymuje się wektor trzy-elementowy, którego elementy są pierwiastkami wielomianu **w(x)**.

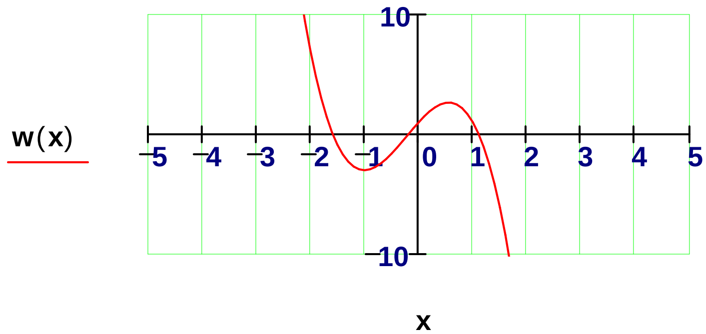
Ćwiczenie 3.

Wyznacz wszystkie pierwiastki wielomianu:

$$w(x) := -3 \cdot x^3 - 2 \cdot x^2 + 5 \cdot x + 1$$

I sposób -stosując funkcję **root**
II sposób - stosując funkcję **polyroots**

$$w(x) := -3 \cdot x^3 - 2 \cdot x^2 + 5 \cdot x + 1 \qquad x := -5, -4.9 .. 5$$



I sposób - stosując funkcję **root**

$$x := -1.6 \qquad x_1 := \mathrm{root}(w(x), x) \qquad x_1 = -1.585$$

$$x := -0.2 \qquad x_2 := \mathrm{root}(w(x), x) \qquad x_2 = -0.19$$

$$x := 1 \qquad x_3 := \mathrm{root}(w(x), x) \qquad x_3 = 1.108$$

II sposób -stosując funkcję **polyroots**

$$a := \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad v := \mathrm{polyroots}(a) \qquad v = \begin{pmatrix} -1.585 \\ -0.19 \\ 1.108 \end{pmatrix} \qquad v_0 = -1.585 \quad v_1 = -0.19 \quad v_2 = 1.108$$

<-- Należy wpisać:
V[0=

Ćwiczenie 4.

Wyznacz miejsca zerowe wielomianu:

$$w1(x) := 3 \cdot x^3 - 2 \cdot x^2 + 5 \cdot x - 10$$

stosując funkcję polyroots:

$$u := \begin{pmatrix} -10 \\ 5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{polyroots}(u) = \begin{pmatrix} -0.326 - 1.556i \\ -0.326 + 1.556i \\ 1.319 \end{pmatrix}$$

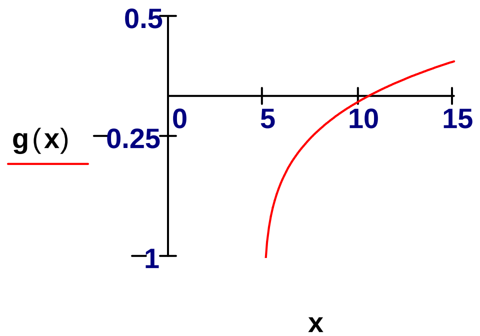
Ćwiczenie 5.

Rozwiąż równanie:

$$\log\left(\sqrt{x-5}\right)+\log\left(\sqrt{2\cdot x-3}\right)-1=0$$

Uwaga: Przed przystąpieniem do rozwiązania zadania - należy wyznaczyć dziedzinę funkcji.
Jest to przedział (5, ∞). Przeanalizuj przedział **(5.1, 15)**

$$g(x):=\log\left(\sqrt{x-5}\right)+\log\left(\sqrt{2x-3}\right)-1 \qquad x:=5.1,5.2..15$$



$$x_p:=\mathrm{root}(g(x),x,9.9,11.4)$$

$$x_p=10.534$$

$$g(x_p)=0$$

lub $x:=10$ $\quad \mathrm{root}(g(x),x)=10.534$

Zadania do samodzielnego rozwiązania:

Wyznacz miejsca zerowe funkcji:

$$f(x):=x^3-2\cdot x^2-x+2$$

$$g(x):=x^3-10\cdot x+2$$

$$h(x):=x^3+\sin\left(x+\frac{\pi}{5}\right)-10 \qquad \text{w przedziale (-4, 4)}$$

$$u(x):=\sin\left(x^2+\frac{x^3}{2}\right) \qquad \text{w przedziale (-2.5, 2)}$$

$$w(x):=x^5-6x^2-2x+3$$

$$y(x):=x^4+3-\left|3x^3+x\right| \qquad \text{dla wartości startowej x=2.5}$$

Rozwiąż równania:

$$x^2+10x=e^x$$

$$\log(4)+e^{2t}+5t^2=0$$

2. ROZWIĄZYWANIE UKŁADÓW RÓWNAŃ I NIERÓWNOŚCI

MathCad rozwiązuje układy równań i nierówności za pomocą procedury iteracyjnej, dlatego wymaga od użytkownika podania początkowych wartości niewiadomych, inicjujących poszukiwania. Dostępne są dwie funkcje rozwiązujące **Find** i **Minerr.**

Funkcja **Find** - poszukuje rozwiazania dokładnego (w granicach toleracji numerycznej)

Sposób postępowania:

1). deklaracja wartości startowych - określenie przybliżonych wartości początkowych wszystkich niewiadomych (jeżeli nie są znane wartości przybliżone - przyjąć **"1"**)

2). otwarcie bloku równań i nierówności komendą **Given**

3). wprowadzić kolejne równania i nierówności układu
Uwaga: - znaki równości i nierówności słabych należy wybierać z palety ***Boolean*** , przy czym w miejsce znaku równości należy wprowadzać tzw. "twardy znak równości" z palety lub wciskając **<Ctrl>+<=>**

4). wpisać komendę zamykającą - funkcję rozwiązującą **Find** a jako jej argumenty należy podać nazwy wszystkich niewiadomych.

Uwaga: Jeżeli program nie znajduje rozwiązania numerycznego przy pomocy procedury Find, to można poszukiwać rozwiązania przybliżonego przy zastosowaniu funkcji **MinErr**

Ćwiczenie 6.

Znajdź dodatnie pierwiastki układu równań:

cos(x) + x - y = 0

$x^2 + y^2 - 4 = 0$

Ponieważ na powyższy układ narzucone są dodatkowe warunki (oba rozwiązania powinny mieć wartości dodatnie), więc inicjujące wartości początkowe powinny być z nimi zgodne:

$$x := 1 \qquad y := 1$$

Given

$$\cos(x) + x - y = 0$$

$$x^2 + y^2 - 4 = 0$$

$$x > 0 \qquad y > 0$$

$$\mathrm{Find}(x, y) = \begin{pmatrix} 1.245 \\ 1.565 \end{pmatrix}$$

Ćwiczenie 7.

Rozwiąż układ równań:

4*ln(x) + x - y^2 = 0

1 + 2*x^2 -x*y - 6*x = 0

o którym wiadomo, że ma rozwiązanie w pierwszej i czwartej ćwiartce.

a). Rozwiązanie w pierwszej ćwiartce: przyjmij wartości startowe x=3 i y=3

$x := 3 \qquad y := 3$

Given

$4\cdot\ln(x) + x - y^2 = 0 \qquad 1 + 2\cdot x^2 - x\cdot y - 6\cdot x = 0 \qquad x > 0 \qquad y > 0$

$$\begin{pmatrix} x1 \\ y1 \end{pmatrix} := \mathrm{Find}(x, y) \qquad \begin{pmatrix} x1 \\ y1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.512 \\ 3.247 \end{pmatrix}$$

b). Rozwiązanie w czwartej ćwiartce: przyjmij wartości starowe x=1 i y=-1

$x := 1 \qquad y := -1$

Given

$4\cdot\ln(x) + x - y^2 = 0 \qquad 1 + 2\cdot x^2 - x\cdot y - 6\cdot x = 0 \qquad x > 0 \qquad y < 0$

$$\begin{pmatrix} x2 \\ y2 \end{pmatrix} := \mathrm{Find}(x, y) \qquad \begin{pmatrix} x2 \\ y2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.723 \\ -1.974 \end{pmatrix}$$

Ćwiczenie 8.

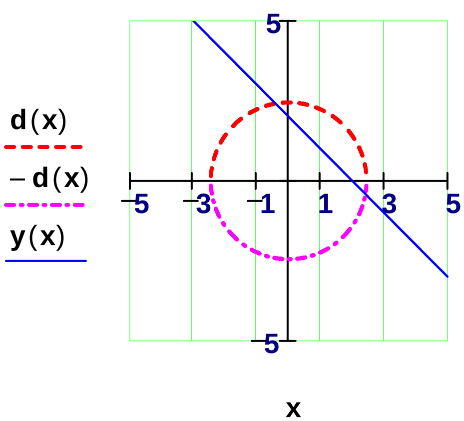
Rozwiąż układ równań:

$x^2 + y^2 = 6$

$x + y = 2$

Rozwiązanie rozpocznij od graficznego przedstawienia równań układu:

$d(x) := \sqrt{6 - x^2} \qquad y(x) := -x + 2 \qquad x := -5, -4.995 .. 5$



Rozwiązanie 1 - leżące w II ćwiartce:

$x := -1 \qquad y := 1$

Given

$x^2 + y^2 = 6$

$x + y = 2$

$x < 0 \qquad y > 0$

$$\mathrm{Find}(x, y) = \begin{pmatrix} -0.414 \\ 2.414 \end{pmatrix}$$

Rozwiązanie 2 - leżące w IV ćwiartce:

$x := 1 \qquad y := -1$

Given

$x^2 + y^2 = 6 \qquad x + y = 2 \qquad x > 0 \qquad y < 0$

$$\text{Find}(x, y) = \begin{pmatrix} 2.414 \\ -0.414 \end{pmatrix}$$

Ćwiczenie 9.

Rozwiąż układ równań:

$x^2 + y^2 = 5$
$x + y = 4$

Rozwiązanie:

$x := 1 \qquad y := 1$

Given

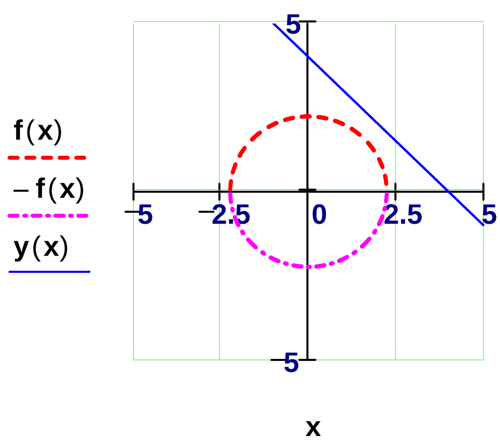
$x^2 + y^2 = 5 \qquad x + y = 4$

$\text{Find}(x, y) = \blacksquare$

Układ ten **nie ma rozwiązania numerycznego**.
Graficzne przedstawienie równań układu:
- górnej połowy okręgu: funkcja **f(x)**
- dolnej połowy okręgu: funkcja **-f(x)**
- prostej **y=-x+4**

$f(x) := \sqrt{5 - x^2} \qquad y(x) := -x + 4$

$x := -5, -4.995 .. 5$



<-- Z lewej strony osi OY wpisz:
f(x),-f(x),y(x)
- Wybierz w oknie formatowania wykresu opcję ***Equal Scales*** - skala jednakowa dla obu osi

Próba wyznaczenia "jak najlepszego" przybliżonego rozwiązania z wykorzystaniem funkcji MinErr

$x := 1 \quad y := 1$

Given

$x^2 + y^2 = 5 \qquad x + y = 4$

$\begin{pmatrix} xs \\ ys \end{pmatrix} := \mathrm{Minerr}(x, y) \qquad \begin{pmatrix} xs \\ ys \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.449 \\ 1.751 \end{pmatrix}$

<-- Gdzie leży punkt o współrzędnych **(xs,ys)** ?

Ćwiczenie 10:

Znajdź wszystkie rozwiązania układu równań:

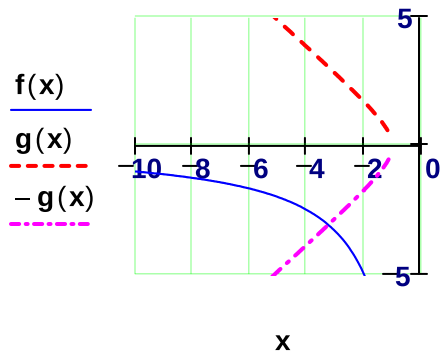
x*y = 10

x^2 - y^2 = 1

Dziedzina funkcji: $x \neq 0$ i $x^2 \geq 1$ ((**x<=-1**) lub (**x>=1**))

a). **Poszukiwanie rozwiązania dla x<-1** (w III ćwiartce)

$f(x) := \frac{10}{x} \qquad g(x) := \sqrt{x^2 - 1} \qquad x := -10, -9.95 .. -1$



$x := -3 \qquad y := -3$

Given

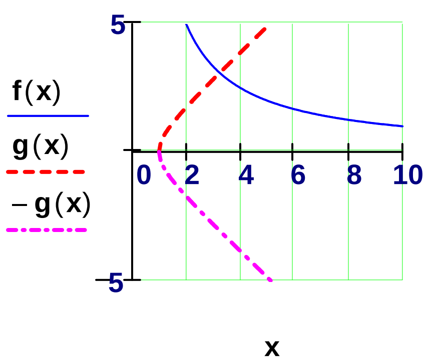
$x < -1$

$x \cdot y = 10 \qquad x^2 - y^2 = 1$

$\mathrm{Find}(x, y) = \begin{pmatrix} -3.242 \\ -3.084 \end{pmatrix}$

b). **Poszukiwanie rozwiązania dla** $x > 1$ (w I ćwiartce)

$f(x) := \frac{10}{x} \qquad g(x) := \sqrt{x^2 - 1} \qquad x := 1, 1.05 .. 10$



$x := 3 \qquad y := 3$

Given

$x > 1$

$x \cdot y = 10 \qquad x^2 - y^2 = 1$

$\mathrm{Find}(x, y) = \begin{pmatrix} 3.242 \\ 3.084 \end{pmatrix}$

Ćwiczenie 11.

Rozwiąż układ równań liniowych:

```
5*x + y + 3*z = 20
x - 2*y + 3*z = -4
2*x + 3*y +3*z = 6
```

Rozwiązanie:

1 sposób - numeryczny:

$x := 1 \qquad y := 1 \qquad z := 1$

Given

$5 \cdot x + y + 3 \cdot z = 20$

$x - 2 \cdot y + 3 \cdot z = -4$

$2 \cdot x + 3 \cdot y + 3 \cdot z = 6$

$$\mathrm{Find}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 5.294 \\ 0.941 \\ -2.471 \end{pmatrix}$$

2 sposób - macierzowy:

$$A := \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 20 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad det := |A| \qquad det = -51 \qquad X := A^{-1} \cdot B$$

$$X = \begin{pmatrix} 5.294 \\ 0.941 \\ -2.471 \end{pmatrix}$$

Sprawdzenie: $A \cdot X = \begin{pmatrix} 20 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$

Zadania do rozwiązania:

Rozwiąż układy równań:

1. $x^2 + y^2 = 9$
   $x^2 + y^2 = 1$

2. $3x + y - 2y^2 = 3$
   $3x^2 - 2xy^2 + y = 3$

3. $x^3 + 3x^2 - 9x - 2 = y$
   $e^x = y + 1$

4. $4x^2 + 9y^2 = 180$
   $3y^2 = 20x$

5. $(\cos(x))^2 + 3\cos(x) + 1 = 0$
   $\sin(x) + \cos(x) + 0.5 = 0$

6. $x^2 + x*y = 10$ z wartościami startowymi **1, 1**
   $y^2 + x*y = 15$

3. OPTYMALIZACJA

MathCad umożliwia poszukiwanie najmniejszych i największych wartości funkcji zarówno z ograniczeniami, jak i bez ograniczeń.
Procedura poszukiwań jest iteracyjna, więc użytkownik musi zainicjować początkowe wartości niewiadomych.
Dostępne są dwie funkcje rozwiązujące:

Minimize - poszukuje wartości najmniejszych
Maximize - poszukuje wartości największych

Ćwiczenie 12.

Znajdź położenie największej wartości funkcji

z(x,y)=5*x-2*y

przy ograniczeniach

2*x+y<=9 x-2*y<=2 -3*x+2*y<=3 x,y>=0

Rozwiązanie:

1. Definicja funkcji celu

$$f(x, y) := 5 \cdot x - 2 \cdot y$$

2. Zainicjowanie niewiadomych wartościami, np. wartością **0**

$$x := 0 \qquad y := 0$$

3. Wpisanie słowa Given - otwierającego blok ograniczeń

Given

$$2x + y \le 9 \qquad x - 2y \le 2 \qquad -3x + 2y \le 3 \qquad x \ge 0 \qquad y \ge 0$$

4. Wywołanie polecenia Maximize

$$\text{Maximize}(f, x, y) = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad f_{max} := f(4, 1) \qquad f_{max} = 18$$

Ćwiczenie 13.

Znajdź minimum funkcji

z(x,y)=x+3*y

przy ograniczeniach

x+4*y>=48 5*x+y>=50 x,y>=0

Rozwiązanie:

$$f(x, y) := x + 3 \cdot y$$

$$x := 0 \qquad y := 0$$

Given

$$x + 4y \ge 48 \qquad 5x + y \ge 50 \qquad x \ge 0 \qquad y \ge 0$$

$$\text{Minimize}(f, x, y) = \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \end{pmatrix} \qquad f_{min} := f(8, 10) \qquad f_{min} = 38$$