Katedra Informatyki Stosowanej - Studium Podstaw Informatyki

PAKIET MathCad - Część IV

1. PROGRAMOWANIE

MathCad posiada możliwości tworzenia prostych podprogramów, które znacznie ułatwiają definiowanie bardziej złożonych algorytmów.

Wszystkie dostępne instrukcje należy wybierać tylko z palety *Programming.*

Z klawiatury wpisujemy jedynie nazwy zmiennych i operatory w polach braku.

Dostępne operacje na palecie ***Programming*** służą do konstruowania programów i oznaczają:

Add Line - wstawienie kolejnej linii dla instrukcji programowych
Pierwsze użycie Add Line definiuje podprogram - kolejne zastosowanie zwiększa liczbę linii.
Ostatnie miejsce zarezerwowane - powinno zawierać wartość zwracaną przez podprogram.

∎ ← ∎ - instrukcja przypisania; np. instrukcja $w \leftarrow f(a,b,c,....)$ - definiuje zmienną **w** i nadajejej wartość numeryczną równą wartości funkcji **f** dla danych argumentów.
Poza programem zmienna **w** pozostaje niezdefiniowana.

∎ if ∎ - instrukcja warunkowa ma postać: ***wyrażenie* if *warunek*** i umożliwia obliczenie wartości ***wyrażenia*** tylko wtedy, gdy spełniony zostanie zadeklarowany ***warunek***

∎ otherwise - instrukcja stosowana wspólnie z instrukcją **if** oznaczająca "**w pozostałych przypadkach"**

np. $y(x) := \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{if } x \neq 0 \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$

for ∎ ∈ ∎ - instrukcja pętli **"dla"** umożliwia wielokrotne obliczenie sekwencji wyrażeń
∎
dla określonych wartości zmiennej kontrolnej, np. suma pierwiastków kwadratowych z liczb od 1 do n:

$$suma\_p(n) := \left| \begin{array}{l} s \leftarrow 0 \\ \text{for } k \in 1..n \\ \quad s \leftarrow s + \sqrt{k} \\ s \end{array} \right.$$

while ∎ - instrukcja iteracyjna **"dopóki"** umożliwiająca określenie warunku zakończenia pętli, np.
∎

$$index(z, limit) := \left| \begin{array}{l} j \leftarrow 0 \\ \text{while } z_j \leq limit \\ \quad j \leftarrow j + 1 \\ j \end{array} \right.$$

break - dodatkowy element instrukcji iteracyjnej umożliwiający przerwanie pętli - poprzez spełnienie warunku

continue - instrukcja inicjująca rozpoczęcie wykonywania kolejnej iteracji pętli

return ∎ - instrukcja wyjścia z podprogramu

∎ on error ∎ - instrukcja blokująca wyświetlenie komunikatów o błędach, która zastępuje je działaniem przygotowanym przed wykonaniem

Ćwiczenie 1.

Definicje funkcji warunkowych:

a). $h(x) := \begin{cases} x^2 - 2 & \text{if } x < -1 \\ x^3 & \text{if } -1 \leq x \leq 1 \\ x & \text{if } x > 1 \end{cases}$

b). $g(x) := \begin{cases} -5x^2 & \text{if } -2 < x < 2 \\ x^3 & \text{otherwise} \end{cases}$

$h(-1.5) = 0.25$ $h(1.5) = 1.5$

$g(-4) = -64$ $g(1.5) = -11.25$

Ćwiczenie 2.

Zdefiniuj funkcję silnia, która dla danego n wyznacza n!. Jeśli n<0 ma wyświetlać komunikat "n-ujemne"

```
silnia(n) := | return "n-ujemne" if n < 0
             | return 1 if n = 0
             | p ← 1
             | for i ∈ 1..n
             |   p ← p·i
             | return p
```

$\text{silnia}(0) = 1$

$\text{silnia}(5) = 120$

$\text{silnia}(20) = 2.433 \times 10^{18}$

$\text{silnia}(-5) =$ "n-ujemne"

Ćwiczenie 3.

Wykorzystując funkcję **silnia** z ćw.2 policz na ile sposobów można:

- wyznaczyć k-elementowe grupy ćwiczeniowe jeśli na roku jest n studentów.
- skreślić szóstkę w TOTOLOTKU

Zdefiniuj funkcję wyznaczającą liczbę kombinacji k-elementowych ze zbioru n-elementowego (wartość symbolu Newtona "n po k")
Jeżeli k>n wyświetl komunikat "k jest większe od n"

```
kombinacje(n, k) := | return "k jest wieksze od n" if k > n
                    | kk ← silnia(n) / (silnia(n − k)·silnia(k))
                    | return kk
```

$\text{kombinacje}(49, 6) = 1.398 \times 10^{7}$

$\text{kombinacje}(120, 32) = 1.371 \times 10^{29}$

$\text{kombinacje}(12, 32) =$ "k jest wieksze od n"

Ćwiczenie 4.

Zdefiniuj funkcję wyznaczającą pole trójkąta równobocznego.

$$S1(a) := \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$$

Ćwiczenie 5.

Zdefiniuj funkcję wyznaczjącą pole trójkąta dowolnego o bokach a, b, c, zawierającą sprawdzenie, czy dane trzy odcinki o długościach a, b i c tworzą trójkąt; Warunek trójkąta: a<b+c i b<a+c i c<a+b

```
S2(a, b, c) := | if (a < b + c) ∧ (b < a + c) ∧ (c < a + b)
               |   | p ← (a + b + c) / 2
               |   | pole ← √(p·(p − a)·(p − b)·(p − c))
               |   | pole
               | 0 otherwise
```

$S2(2, 2, 2) = 1.732$

$S2(3, 4, 5) = 6$

$S2(3, 4, 8) = 0$

Ćwiczenie 6.

Wyznacz sumę liczb parzystych z przedziału <1, n>

Funkcję obliczającą resztę z dzielenia: **mod(▪,▪)** wstaw wykorzystując opcję menu głównego lub **Insert | Function** - kategoria: `Number Theory/Combinatorics`

```
suma_parz(n) := | rob ← 0
                | for  i ∈ 1.. n
                |    rob ← rob + i  if  (mod(i,2)) = 0
                | rob
```

$suma\_parz(10) = 30$

$suma\_parz(99) = 2450$

Ćwiczenie7.

Zdefiniuj **n**-elementowy wektor **A,** gdzie $A_i := \sin\left(\frac{i^2}{\pi}\right)$

i na podstawie jego elementów wektor **B** wg przepisu: $B_i := \begin{cases} (A_i)^2 & \text{if } A_i < 0 \\ A_i + 1 & \text{if } A_i = 0 \\ A_i & \text{if } A_i > 0 \end{cases}$

Policz, ile w każdej z tablic **A** i **B** jest elementów wikszych od **0.5;** Wyświetl elementy obu tablic.

ORIGIN ≡ 1

```
Wek(A) := | n ← length(A)
          | for  i ∈ 1.. n
          |    | B_i ← (A_i)^2  if  A_i < 0
          |    | B_i ← 1  if  A_i = 0
          |    | B_i ← A_i  if  A_i > 0
          | B
```

$n := 20$ $i := 1..n$ $A_i := \sin\left(\frac{i^2}{\pi}\right)$

$B := Wek(A)$

```
ile_w(X,c) := | ile ← 0
              | for  i ∈ 1.. length(X)
              |    ile ← ile + 1  if  X_i > c
              | ile
```

$ile\_w(A, 0.5) = 10$ $ile\_w(B, 0.5) = 13$

Ćwiczenie 8.

Dana jest **m**-elementowa, jednowymiarowa tablica **X** zawierajaca oceny punktowe z informatyki (skala <0, 100>).
.Wykonaj poniższe polecenia:

a). zdefiniuj funkcję **srednia** wyznaczającą średnia arytmetyczną z wszystkich elementów tablicy

$$\text{srednia}(X) := \left| \begin{array}{l} s \leftarrow 0 \\ \text{for } k \in 1..\text{length}(X) \\ \quad s \leftarrow s + X_k \\ \dfrac{s}{\text{length}(X)} \end{array} \right.$$

Przyjmij przykładowe wartości:

$$X := \begin{pmatrix} 65 \\ 96 \\ 38 \\ 95 \\ 100 \end{pmatrix}$$

$sr := \text{srednia}(X) \qquad sr = 78.8$

b). utwórz nową m-elementową tablicę **y**, której elementy są zdefiniowane poniżej:

$$\text{nowa}(X) := \left| \begin{array}{l} \text{for } k \in 1..\text{length}(X) \\ \quad \left| \begin{array}{l} Y_k \leftarrow \sqrt{(X_k)^2 + 1} \text{ if } X_k < sr \\ Y_k \leftarrow \sqrt{X_k} \text{ otherwise} \end{array} \right. \\ Y \end{array} \right.$$

$Y := \text{nowa}(X) \qquad Y = \begin{pmatrix} 65.008 \\ 9.798 \\ 38.013 \\ 9.747 \\ 10 \end{pmatrix}$

c). zdefiniuj funkcję **ile_wiekszych** wyznaczającą liczbę elementów tablicy **X** większych od średniej

$$\text{ile1}(X) := \left| \begin{array}{l} j \leftarrow 0 \\ \text{for } k \in 1..\text{length}(X) \\ \quad j \leftarrow j + 1 \text{ if } X_k > \text{srednia}(X) \\ j \end{array} \right.$$

lub

$$\text{ile\_wiekszych}(X) := \left| \begin{array}{l} j \leftarrow 0 \\ s \leftarrow \text{srednia}(X) \\ \text{for } k \in 1..\text{length}(X) \\ \quad j \leftarrow j + 1 \text{ if } X_k > s \\ j \end{array} \right.$$

$\text{ile1}(X) = 3$

$lw := \text{ile\_wiekszych}(X) \qquad lw = 3$

Ćwiczenie 9.

Zdefiniuj a następnie wyświetl **100**-elementowy wektor **z** według podanego wzoru.
Zaprogramuj funkcję **index**, która wyznacza indeks pierwszego elementu większego od danej wartości **limit**

$k := 1..100$

$$z_k := \left| \begin{array}{l} \sqrt{k^2 + 4} \text{ if } 1 \le k \le 4 \\ \sin(k)^2 + 5 \text{ if } 5 \le k \le 8 \\ \ln(k) + 5 \text{ if } k \ge 9 \end{array} \right.$$

$$\text{index}(z, \text{limit}) := \left| \begin{array}{l} j \leftarrow 1 \\ \text{while } z_j \le \text{limit} \\ \quad j \leftarrow j + 1 \\ j \end{array} \right.$$

Przykładowe wywołania: $\text{index}(z, 2) = 1 \qquad \text{index}(z, 4) = 4 \qquad \text{index}(z, 8) = 21$

2. OBLICZENIA SYMBOLICZNE

Obliczenia numeryczne i symboliczne.

Pomiędzy obliczeniami numerycznymi i symbolicznymi jest istotna różnica.
Wyrażenia numeryczne są przeliczane od nowa, gdy użytkownik naciśnie **F9** lub jeśli w dokumencie zostanie dokonana zmiana, a włączony jest tryb automatycznych obliczeń.
Operacje symboliczne są przeprowadzane tylko wtedy, gdy użytkownik zaznaczy jakieś wyrażenie i wybierze

polecenie z menu ***Symbolics*** lub z palety ***Symbolic*** .
W przypadku modyfikacji wyrażenia rezultaty symboliczne ***nie są uaktualniane!***

Symbolics menu - wybrane opcje
Evaluate / Symbolically lub **<Shift>+F9** - wykonanie obliczeń na symbolach
Evaluate / Floating Point... - umożliwia wykonanie obliczeń na symbolach, zwracając liczbę, gdy to jest możiwe
Evaluate / Complex - umożliwia wykonanie obliczeń na symbolach, zwracając wyrażenie zespolone
Simplify- uprość
Expand - rozwiń wyrażenie
Factor - rozłóż na czynniki
Collect - wydziel czynnik
Polynomial Coefficients - współczynniki wielomianu
Variable
/ Solve - rozwiąż względem zmiennej
/ Substitute - podstaw pod zmienną
/ Differentiate - pochodna względem danej zmiennej
/ Integrate - całkowanie po danej zmiennej
/ Expand to Series... - rozwiń w szereg
/ Convert to Partial Fraction - rozłóż na ułamki skład.

Matrix
/ Transpose- transponuj
/ Invert - macierz odwrotna
/ Determinant - wyznacznik macierzy
Evaluation Style... sposób wyświetlania obliczeń

Postać zapisu uzyskasz wybierając odpowiedni format wyprowadzania obliczeń z menu:
Symbolics | Evaluation Style :
Vertically, inserting lines
Vertically, without inserting lines
Horizontally
- Show comments
- Evaluate in Place (yields - zwraca wartość)
W tym dokumencie wybrano: **Horizontally i Show comments**

2.1. Obliczanie pochodnych i całek nieoznaczonych

Uwaga: Szablony pochodnych i całek wstawiaj tylko z palety ***Calculus***
Do obliczeń wykorzystaj paletę ***Symbolic*** ($\rightarrow$) lub polecenie **Symbolics | Evaluate | Symbolically**

a). $\frac{d}{dx}x^2 \rightarrow 2\cdot x$

b). $\frac{d}{dx}\sin(3x^2) \rightarrow 6\cdot\cos(3\cdot x^2)\cdot x$

c). $\frac{d^2}{dx^2}(x\cdot \operatorname{atan}(x)) \rightarrow \frac{2}{1+x^2} - 2\cdot\frac{x^2}{(1+x^2)^2}$

d). $\int x^2\,dx \rightarrow \frac{1}{3}\cdot x^3$

e). $\int \sqrt{\frac{a}{a-x}}\,dx \rightarrow 2\cdot[(-a)+x]\cdot\left[\frac{-a}{(-a)+x}\right]^{\frac{1}{2}}$

f). $\int \frac{x^2}{x-1}\,dx \rightarrow x + \frac{1}{2}\cdot x^2 + \ln(x-1)$

g). $\int \frac{x^3+3\cdot x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx \rightarrow \frac{1}{3}\cdot x^2\cdot(1+x^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{7}{3}\cdot(1+x^2)^{\frac{1}{2}}$

h). $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$ yields $\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

2.2. Obliczanie granic

a). $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e$

b). $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+2}}{5\cdot n-11} \to \frac{1}{5}$

c). $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin(x)}{x} \to 1$

d). $\displaystyle\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x} \to -\infty$

2.3. Rozwijanie funkcji w szereg potęgowy

Do obliczeń wykorzystaj polecenie menu: **Symbolics | Variable | Expand to Series...** po wcześniejszym:
- zaznaczeniu zmiennej, względem której nastąpi rozwinięcie w szereg.

Uwaga: W oknie dialogowym określ rząd szeregu.

a). $\sin(x)$ msgMapleSeries $1\cdot x-\frac{1}{6}\cdot x^3+\frac{1}{120}\cdot x^5+O\left(x^6\right)$

b). $\cos(x)$ msgMapleSeries $1-\frac{1}{2}\cdot x^2+\frac{1}{24}\cdot x^4-\frac{1}{720}\cdot x^6+\frac{1}{40320}\cdot x^8+O\left(x^{10}\right)$

c). $\ln(1+x)$ msgMapleSeries

$$x-\frac{1}{2}\cdot x^2+\frac{1}{3}\cdot x^3-\frac{1}{4}\cdot x^4+\frac{1}{5}\cdot x^5-\frac{1}{6}\cdot x^6+\frac{1}{7}\cdot x^7-\frac{1}{8}\cdot x^8+\frac{1}{9}\cdot x^9+O\left(x^{10}\right)$$

d). $\sqrt{x+1}$ msgMapleSeries

$$1+\frac{1}{2}\cdot x-\frac{1}{8}\cdot x^2+\frac{1}{16}\cdot x^3-\frac{5}{128}\cdot x^4+\frac{7}{256}\cdot x^5-\frac{21}{1024}\cdot x^6+\frac{33}{2048}\cdot x^7+O\left(x^8\right)$$

2.4. Podstawianie nowych wyrażeń pod zmienne

Przekształcenia należy rozpocząć od wstawienia operacji **substitute** z palety ***Symbolic***
lub
- wyrażenie, które ma zastąpić dotychczasową zmienną skopiować do schowka
- zaznaczyć zmienną, która ma być zmieniana i wybrać opcję z menu głównego: **Symbolics | Variable | Substitute**

a). Oblicz wartość wyrażenia $\frac{2w-5}{3w+4}$ przy podstawieniu pod zmienną zmiennej **w=q+1**

$$\frac{2\cdot w-5}{3\cdot w+4} \text{ substitute}, w = q+1 \to \frac{2\cdot q-3}{3\cdot q+7}$$

b). W poniższym wyrażeniu zastąpić zmienną **x** wyrażeniem: v^2+5

$$x^3-4\cdot x+7 \text{ substitute}, x = v^2+5 \to \left(v^2+5\right)^3-4\cdot v^2-13$$

lub

$x^3 - 4 \cdot x + 7$ by substitution, yields $\left(v^2 + 5\right)^3 - 4 \cdot v^2 - 13$

Uwaga: Wcześniej skopiuj wyrażenie $v^2 + 5$ do schowka!

c). zastąpić **y** wyrażeniem **sin(x)+cos(x)**

$$\frac{1}{y} + \frac{y^2 + 3}{\sqrt{y^2 + 1}} \quad \text{by substitution, yields} \quad \frac{1}{\sin(x) + \cos(x)} + \frac{(\sin(x) + \cos(x))^2 + 3}{\sqrt{(\sin(x) + \cos(x))^2 + 1}}$$

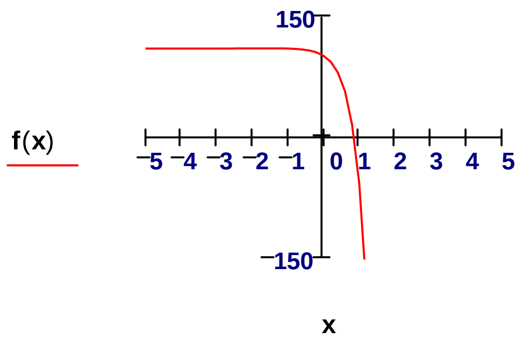
2.5. Określanie współczynników wielomianu

Polecenie **Symbolics | Polynomial Coefficients** wyświetla w postaci wektora uporządkowane współrzędne wielomianu. Przed wywołaniem polecenia ustaw kursor na danej zmiennej.

względem e^x : $3 \cdot e^x - 7 \cdot e^{3 \cdot x} - 5 \cdot e^{2 \cdot x} + 111$ msgMapleCoeffs $\begin{pmatrix} 111 \\ 3 \\ -5 \\ -7 \end{pmatrix}$

Rozwiąż równanie $3 \cdot e^x - 7 \cdot e^{3 \cdot x} - 5 \cdot e^{2 \cdot x} + 111 = 0$

$f(x) := 3 \cdot e^x - 7 \cdot e^{3 \cdot x} - 5 \cdot e^{2 \cdot x} + 111$ $\qquad x := -5, -4.8 .. 5$



$$\text{polyroots}\left(\begin{pmatrix} 111 \\ 3 \\ -5 \\ -7 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1.531 + 2.101i \\ -1.531 - 2.101i \\ 2.347 \end{pmatrix}$$

$e^x = 2.347$ $\qquad x := 1$ $\qquad \text{root}\left(e^x - 2.347, x\right) = 0.853$

2.6. Symboliczne rozwiązywanie równań i nierówności

Polecenie **Symbolics | Variable | Solve** pozwala rozwiązać równanie względem zaznaczonej zmiennej.
Podobnie działa polecenie ***solve*** z palety ***Symbolic*** .
Uwaga: Znak < **=** > wstaw używając klawiszy **<Ctrl>+ <=>** lub z palety **Boolean**

a). względem zmiennej **x:** $x^2 - 2 \cdot x \cdot y = 0$ has solution(s) $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \cdot y \end{pmatrix}$

b). względem zmiennej **y** $x^2 - 2 \cdot x \cdot y = 0$ has solution(s) $\frac{1}{2} \cdot x$

c). $\left(x^3 - 5 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 20\right) > 0$ has solution(s) $\begin{pmatrix} x < 2 \cdot -2 < x \\ 5 < x \end{pmatrix}$

d). $u^2 + u - 1 = a$ has solution(s) $\begin{bmatrix} \frac{-1}{2} + \frac{1}{2}\cdot(5+4\cdot a)^{\frac{1}{2}} \\ \frac{-1}{2} - \frac{1}{2}\cdot(5+4\cdot a)^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix}$

e). $u^2 - 2\cdot u\cdot a = 0$ solve , u $\rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 2\cdot a \end{pmatrix}$

f). $u^2 - 7\cdot u + 4 > 0$ solve , u $\rightarrow \begin{pmatrix} u < \frac{7}{2} - \frac{1}{2}\cdot 33^{\frac{1}{2}} \\ \frac{7}{2} + \frac{1}{2}\cdot 33^{\frac{1}{2}} < u \end{pmatrix}$

2.7. Symboliczne rozwiązywanie układów równań

Uwaga: Po wpisaniu polecenia **Find** wraz z jej argumentami należy nacisnąć < **Ctrl > + < . >**
oraz kliknąć poza funkcją Find.

a).

Given $x + 2\cdot\pi\cdot y = a$ $4\cdot x + y = b$ Find(x , y) $\rightarrow \begin{bmatrix} \dfrac{2\cdot\pi\cdot b - a}{(-1) + 8\cdot\pi} \\ \dfrac{-[(-4)\cdot a + b]}{(-1) + 8\cdot\pi} \end{bmatrix}$

b).

Given $4y - 3z + 5x - 2 = a$ $x + 2z - 3y = b$ $x - 2y + z = c$

Find(x , y , z) $\rightarrow \begin{pmatrix} \frac{-1}{6}\cdot c + \frac{1}{3}\cdot b + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\cdot a \\ \frac{-13}{6}\cdot c + \frac{4}{3}\cdot b + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\cdot a \\ \frac{-19}{6}\cdot c + \frac{7}{3}\cdot b + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\cdot a \end{pmatrix}$

2.8. Symboliczne operacje na macierzach

Program umozliwia wykonywanie obliczeń macierzowych na symbolach wykorzystują operacje umieszczone na palecie ***Symbolic:***

M^T - macierz transponowana M^{-1} - macierz odwrotna **|M|** - wyznacznik macierzy

lub wykorzystując polecenia menu **Symbolics | Matrix**

a).

$A := \begin{pmatrix} a11 & a12 \\ a21 & a22 \end{pmatrix}$

$|A| \rightarrow a11\cdot a22 - a12\cdot a21$

$$A^{T} \rightarrow \begin{pmatrix} a11 & a21 \\ a12 & a22 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} \rightarrow$$

b). $\begin{pmatrix} x & 1 & a \\ -b & x^2 & -a \\ 1 & b & x^3 \end{pmatrix}$ has determinant $x^6 + x \cdot a \cdot b + b \cdot x^3 - a \cdot b^2 - a - a \cdot x^2$